PCSI 1
2009-2010

Colle 11 deuxième semaine

Du 15/03 au 26/03

1 Polynômes

- Définition comme suite presque nulle. Unicité des coefficients. Définition du degré. **Différence entre polynôme et fonction polynômiale**.
- $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Notation polynômiale : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$, somme, produit, composition.
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée de deux polynômes.
- Intégrité de $\mathbb{K}[X]$.
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Division euclidienne. Réalisation effective de telles divisions (révision de CM1 sur les divisions). Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
- Polynômes irréductibles. Définition, exemples. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs irréductibles (**Admis**).
- Valeur d'un polynôme en un point. Fonction polynômiale associée à un polynôme. Morphisme d'anneaux injectif ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.
- Racines. a est racine de P ssi $(X - a)$ divise P. Définition de l'ordre de multiplicité. Nombre maximal de racines d'un polynôme.
- Dérivation des polynômes. Somme, produit (Leibniz), composée. Lien avec le degré. Formule de Taylor polynômiale. Lien entre ordre de multiplicité d'une racine et dérivées successives.
- Polynômes scindés. Exemple de $X^n - 1$.
- Relation coefficients-racines.
- Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (**Admis**). Conjugaison d'un polynôme.

Les notions de PGCD et PPCM de polynômes ne sont pas au programme de cette classe.

2 Espaces vectoriels

La première semaine seules des questions de cours seront posées sur les espaces vectoriels. Pas de dimension finie pour l'instant.

- Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Exemples : $\mathbb{K}$ lui même, produit cartésien, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, E^X où E est un ev et X un ensemble, les suites, les polynômes, les solutions d'un équation différentielle homogène.
- Définition d'une combinaison linéaire.(Rappel initiatique sur les systèmes).
- Définition d'un sous espace vectoriel. Caractérisation.
- L'intersection de deux sous ev est un sous ev. Mise en garde contre une généralisation à la réunion et au complémentaire.
- Définition de la somme de deux sous espaces vectoriels. Définition de la somme directe et caractérisation. Définition du supplémentaire d'un sous espace vectoriel et caractérisation (G est supplémentaire de F dans E ssi $E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$).
- Définition d'une application linéaire de l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, d'un endomorphisme(notation $\mathcal{L}(E)$) et d'une forme linéaire.
- Opérations de composition, de distributivité à gauche et à droite de la somme par rapport à la composition. L'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Formule du binôme de Newton ($f + g$ composée n fois avec elle même).

- Noyau et image d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité (c'est un rappel du chapitre groupe).
- Définition d'un isomorphisme linéaire, d'un automorphisme, d'espaces vectoriels isomorphes. Propriétés sur la réciproque d'un isomorphisme, sur la composée de deux isomorphismes, groupe $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.
- Définition d'un projecteur et d'une symétrie quand on a deux sous espaces vectoriels supplémentaires. Propriétés des projecteurs. Caractérisation des projecteurs ($p : E \to E$ est un projecteur ssi p est linéaire et $p^2 = p$).
- Propriétés des symétries. Caractérisation des symétries (s symétrie ssi s linéaire et $s^2 = Id$). Liens projecteurs-symétries. Affinités linéaires.